אם M חבורה אבלית, ו$\{f : M \to M | f(x+y) = f(x) + f(y)\}$, אז $\phi : R \to \mathrm{End}(M)$ הומומורפיזם של חוגים $\Leftrightarrow$ כפל בסקלר ההופך את M למודול מעל R $\alpha \cdot m = (\psi(\alpha))(m)$.

כלומר סקלר(איבר בR) הופך לאנדומורפיזם על M, שמבצע את הפעולה של ההכפלה בסקלר. אפשר להגיד שהמודול זה הפונקציה שהופכת את הסקלר לאנדומורפיזם.

דוגמאות

- מודולים מעל $\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות.
- מודולים מעל $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות M כך ש$\exp|6$(חבורות אבליות M כך ש$6M = 0$)
- מודולים מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ = חבורות אבליות M כך ש$2M = 0$ - מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- מודולים מעל שדה $\mathbb{F}$ = מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$
- מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ = מרחב וקטורי V + $T : V \to V$
- מודול מעל $\mathbb{F}[x,y]$ = מרחב וקטורי V + $\begin{matrix} S : V \to V \\ T : V \to V \end{matrix}$ כך ש$T \circ S = S \circ T$.

בשתי הדוגמאות האחרונות, כל פולינום הוא סקלר. לדוגמה:

$$xy \cdot v = x \cdot (yv) \qquad (x+y) \cdot v = x \cdot v + y \cdot v$$

וכו'.

- מודול מעל $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^3 \rangle = \left\{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2\right\}$ = מרחב וקטורי + אופרטור $T : V \to V$ כך ש$T^3 = 0$

$$\underset{v \mapsto \varepsilon \cdot v}{V \to V}$$

M מודול מעל חוג R, $I \lhd R$.

מתי M הוא "בעצם" מודול מעל R/I?

אם לכל $a \in I$ מתקיים $a \cdot M = 0$, אז M הוא מודול מעל R/I לפי הפעולה $(\alpha + I) \cdot v = \alpha \cdot v$

הערה: כל מודול מעל R/I הוא אוטומטית גם מודול מעל R: $\alpha \cdot v = (\alpha + I) \cdot v$.

תזכורת - תת מודול

$N \subseteq M$ כך ש$R \cdot N \subseteq N$

כלומר תת חבורה של המודול הסגורה לכפל בסקלר

מודול מנה

יהיו M מודול מעל R וN תת־מודול. אז המנה

$$M/N = \{x + N | x \in M\}$$

היא מודול מעל R לפי הפעולה

$$\alpha \cdot (x + N) = \alpha \cdot x + N$$

(מוגדר היטב כי $\alpha \cdot N \subseteq N$)

דוגמה

$\mathbb{F}$ שדה, $V = \mathbb{F}^2$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3y \end{pmatrix}$$

V מודול מעל $\mathbb{F}[\lambda]$ לפי הפעולה $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3y \end{pmatrix}$. נחפש תת־מודול לא טריוויאלי,

$$0 \subset U \subset V$$

$$U = \mathbb{F} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

תת מודול $\Leftrightarrow$ לכל $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, $(f(T))\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$ $\Leftrightarrow$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a + 2b \\ 3b \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U = \mathbb{F} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

קיים k כך ש

$$a + 2b = ka$$

$$3b = kb$$

$b \neq 0$: $k = 3$, $a = b$. $U_3 = \mathbb{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{F}[\lambda]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. במקרה הזה המודול מוגדר לפי $\lambda \cdot v = 3v$

$b = 0$: $k = 1$. $U_1 = \mathbb{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{F}[\lambda]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. במקרה הזה המודול מוגדר לפי $\lambda \cdot v = v$

נחשב את מודול המנה V/U_1:

$$\mathrm{V}/\mathrm{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + U_1 \middle| x, y \in \mathbb{F} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + U_1 \middle| y \in \mathbb{F} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U_1 \right\}$$

$$\lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U_1 \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + U_1 = 3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U_1 \right)$$

הערה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + U_1 = 3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U_1 \right)$ - מותר להוציא את 3 מחוץ לסוגריים מפני שההכפלה היא לא בין קבוצות, אלא בין קבוצות מנה, שמוגדרת באמצעות הכפלת המייצגים.

חוץמזה, $\mathbb{F}$ הוא שדה ולכן $3^{-1} \in U_1$, אבל זו לא הסיבה האמיתית לכך שניתן לבצע את זה.

מסקנה: V/U_1 הוא המודול המתואר ע"י ההעתקה $v \mapsto (3\cdot)\, v$

הומומורפיזם

M, N מודולים מעל R.
הומומורפיזם מM לN הוא פונקציה

$$f : M \to N$$

המקיימת

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x) \qquad \alpha \in R$$

דוגמאות

- A, B חבורות אבליות $\Leftarrow$ מודולים מעל $\mathbb{Z}$. כל הומומורפיזם על חבורות הוא הומומורפיזם של מודולים.
- V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ = מודולים של $\mathbb{F}$. הומומורפיזם של מודולים = הומומורפיזם של מ"ו.
- כל חוג הוא מודול מעל עצמו. הומומורפיזם של חוגים:

$$R \to R$$

$$f(xy) = f(x)\, f(y)$$

הומומורפיזם של מודולים(מעל R):

$$R \to R$$

$$f(\alpha y) = \alpha \cdot f(y)$$

לדוגמה, $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. מהם ההומומורפיזם של חוגים $R \xrightarrow{f} R$?
נניח $\beta = f\left(\sqrt{2}\right)$, אז

$$\beta^2 = f\left(\sqrt{2}\right)^2 = f\left(\sqrt{2}^2\right) = f(2) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \pm\sqrt{2}$$

$$a + \sqrt{2} \mapsto a \pm b\sqrt{2}$$

כלומר, יש שני הומ' של חוגים מR לעצמו

הומומורפיזם של מודולים: יהי $f : R \to R$ הומומורפיזם של מודולים. נסמן $\gamma = f(1)$.

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot \gamma$$

האם $x \overset{f}{\mapsto} x \cdot \gamma$ היא הומומורפיזם של מודולים, $R \to R$?

- שומרת חיבור - $\surd$
- שומרת כפל בסקלר?

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha x) & \overset{?}{=} & \alpha \cdot f(x) \\ \| & & \| \\ (\alpha x)\gamma & \overset{\surd}{=} & \alpha \cdot (x\gamma) \end{array}$$

סיכום

יהי R חוג. לכל $\gamma \in R$, $x \mapsto x \cdot \gamma$ היא הומומורפיזם של מודולים מעל R, $R \to R$, ואלו כולם.

הגדרה

יהי $\varphi : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) | x \in M\} \leq N$$

$$\ker\varphi = \{x \in M | \varphi(x)\} = 0$$

הומומורפיזם שהוע חח"ע ועל נקרא <u>איזומורפיזם</u>.

משפט האיזומורפיזם הראשון

יהי $\varphi : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R. אז

$$\mathrm{M}/_{\ker\psi} \neq \mathrm{Im}\varphi$$

הוכחה

משפט האיזומורפיזם הראשון מחבורות מוכיח ש

$$\overline{\varphi} : x + \ker\varphi \mapsto \varphi(x)$$

הוא איזומורפיזם של חבורות

$$\mathrm{M}/_{\ker\varphi} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\varphi$$

בנוסף לזה

$$\overline{\varphi}(\alpha \cdot (x + \ker\varphi)) = \overline{\varphi}(\alpha \cdot x + \ker\varphi) = \varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \overline{\varphi}(x + \ker\varphi)$$

פעולות בתת־מודולים

M מודול, $N_1, N_2 \leq M$.

$$N_1 + N_2 = \left\{ v_1 + v_2 \middle| \begin{array}{l} v_1 \in N_1 \\ v_2 \in N_2 \end{array} \right\}$$

זה תת מודול(הקטן ביותר שמכיל את N_1 ואת N_2)

משפט האיזומורפיזם השני

M מודול מעל R, $N, K \leq M$. אזי

$$\mathrm{N+K}/_{\mathrm{K}} \cong \mathrm{N}/_{\mathrm{N}\cap\mathrm{K}}$$

הוכחה

נבנה הומומורפיזם $N \to {}^{N+K}/_{K}$ לפי $x \overset{\varphi}{\mapsto} x+K$ (φ על)

$$\ker\varphi = \{x | x+K = 0+K\}$$

.....

משפט האיזומורפיזם השלישי

$K \subseteq N \subseteq M$ תת־מודולים מעל R. אז ${}^{N}/_{K} \subseteq {}^{M}/_{K}$ תת מודול, ובנוסף ${}^{(M/K)}/_{(N/K)} \cong {}^{M}/_{N}$

הוכחה

נגדיר הומומורפיזם ${}^{M}/_{N} \to {}^{N}/_{K}$ לפי $x+K \overset{\varphi}{\mapsto} x+N$ (מוגדר היטב כי $K \subseteq N$)

$$\ker\varphi = \{x+K | x+N = 0+N\} = {}^{N}/_{K}$$

טענה(המודולריות של שריג תת־המודולים)

לכל שלושה תת־מודולים $K \subseteq N$ וL,

$$N \cap (L+K) = (N \cap L) + K$$

כלומר $N \cap L + K$ מוגדר היטב.

הוכחה

$\supseteq$ ברור.

$\subseteq$ נניח $\underbrace{n}_{\in N} = \underbrace{l}_{\in L} + \underbrace{k}_{\in K} \in N \cap (L+K)$

$$\Downarrow$$

$$N \ni n-k = \underbrace{l}_{\in L} \in L \cap N \Rightarrow n \in (N \cap L) + K$$

וניתן לצייר את שריג תת־המודולים:

$$
\begin{tikzcd}
 & N+L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
N \arrow[dr, dash] & & K+L \arrow[dl, dash] \arrow[ddr, dash] \\
 & N \cap K+L \arrow[d, dash] & \\
 & \| & L \arrow[d, dash] \\
 & K+N \cap L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K \arrow[dr, dash] & & N \cap L \arrow[dl, dash] \\
 & K \cap L &
\end{tikzcd}
$$